BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2011

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДОЙ

М.А.МЕХТИЕВ
ИММ НАН Азербайджана
mahirmehdiyev@mail.ru

С помощью вариационного принципа в геометрически нелинейной постановке исследована задача о параметрическом колебании поперечно подкреплённой цилиндрической оболочки, контактирующей с внешней вязкоупругой средой и находящейся под действием внутреннего давления. Влияния внешней среды учтены с помощью модели Пастернака. На плоскости «нагрузка-частота» приведены зависимости зоны динамической устойчивости от параметров конструкции.

Ключевые слова: подкрепленная оболочка, вариационный принцип, потенциальная энергия, кинетическая энергия, нелинейные параметрические колебания, вязкоупругая среда

Рациональное конструирование тонкостенных элементов конструкций и проведения их надежного расчета на прочность приводит к необходимости более полного учета особенностей материалов и всего конструкций. Для подробного исследования несущей способности таких конструкций целесообразно использовать всевозможное воздействие на них со стороны окружающей среды. Одним из таких воздействий является контакт оболочки с вязкоупругой средой. Такого типа задачи часто встречаются в технике, в частности, в фундаментостроении. Решение такого типа задач представляет математическую трудность, которая углубляется как с учетом динамических эффектов, так и с учетом воздействия окружающей среды, где требуется разработка приближенного метода. Одним из таких методов является вариационный метод. Параметрические колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой неподкрепленной цилиндрической оболочки с заполнителем, с применением вариационного принципа и модели Пастернака, исследованы в работе [1]. В геометрически нелинейной постановке, с применением вариационного принципа, нелинейные колебания подкрепленной перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с вязкоупругим заполнителем исследованы в [2].

В данной работе с применением вариационного принципа в геометрически нелинейной постановке исследована задача о параметрическом колебании поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки, контактирующей с внешней вязкоупругой средой и находящейся под действием внутреннего давления. Влияния внешней среды учтены с помощью модели Пастернака.

Постановка задачи. Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки, контактирующей со средой, получим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для применения указанного принципа предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы.

Потенциальная энергия упругой деформации цилиндрической оболочки имеет вид [3]:

$$\Pi_0=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left\{N_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+N_y\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}-\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)+N_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\right.$$

$$\left.-M_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-M_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2M_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right\}dxdy. \tag{1}$$

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации $j-$го поперечного ребра таковы [4]:

$$\Pi_j=\frac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2}\left[E_jF_j\left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y}-\frac{w_j}{R}\right)^2+E_jJ_{xj}\left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}+\frac{w_j}{R^2}\right)^2+E_jJ_{zj}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}-\frac{\varphi_{kpj}}{R}\right)^2+\right.$$

$$\left.+G_jJ_{kpj}\left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial y}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_j}{\partial y}\right)^2\right]dy\cdot \tag{2}$$

В выражениях (1) и (2) x_1, x_2, y_1, y_2 - координаты криволинейных и прямолинейных краев оболочки; F_j, J_{zj}, J_{xj}, J_{kpj} - площадь и моменты инерции поперечного сечения $j-$го поперечного стержня относительно оси Oz, и оси параллельной оси Ox и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; E_j, G_j - модули упругости и сдвига материала $j-$го поперечного стержня.

Потенциальная энергия внешних поверхностных и краевых нагрузок, приложенных к оболочке, определяется как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное, и представляется в виде:

$$A_0=-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(q_x u+q_y \vartheta+q_z w\right)dxdy-\int_{y_1}^{y_2}\left(T_1 u+S_1\vartheta+Q_1 w+M_1\varphi_1\right)\Big|_{x=x_1}^{x=x_2}dy-$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\left(S_2 u+T_2\vartheta+Q_2 w+M_2\varphi_2\right)\Big|_{y=y_1}^{y=y_2}dx. \qquad (3)$$

Потенциальная энергия внешних краевых нагрузок, приложенных к торцам $j-$го поперечного стержня, аналогично определяются следующими выражениями (принимается, что к ребрам приложены только краевые нагрузки):

$$A_j=-\left(S_j u_j+T_j\vartheta_j+Q_j w_j+M_j\varphi_j+M_{1j}\varphi_{zj}+M_{kpj}\varphi_{kpj}\right)\Big|_{y=y_1}^{y=y_2}. \qquad (4)$$

Полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий упругих деформаций оболочки и ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок:

$$\Pi=\Pi_0+\sum_{j=1}^{k}\Pi_j+A_0+\sum_{j=1}^{k}A_j\,. \qquad (5)$$

Кинетические энергии оболочки и ребер записываются в виде:

$$K_0=\frac{Eh}{2\left(1-\nu^2\right)}\int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t_1}\right)^2\right]d\xi d\theta\,, \qquad (6)$$

$$K_j=\rho_j F_j\int_{y_1}^{y_2}\left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w_j}{\partial t}\right)^2+\frac{J_{kpj}}{F_j}\left(\frac{\partial \varphi_{kpj}}{\partial t}\right)^2\right]dy\,, \qquad (7)$$

здесь $t-$временная координата, ρ_0 , ρ_j - плотности материалов, из которых изготовлены оболочка и $j-$й поперечный стержень.

Кинетическая энергия ребристой оболочки определяется так:

$$K=K_0+\sum_{j=1}^{k}K_j\,. \qquad (8)$$

Уравнения движения поперечно подкрепленной ребристой оболочки, контактирующей со средой, получены на основе принципа стационарности действия Остроградского-Гамильтона:

$$\delta W=0\,, \qquad (9)$$

где $W=\int_{t'}^{t''}Ldt-$ действие по Гамильтону, $L=K-\Pi$ - функция Лагранжа, t' и t'' - заданные произвольные моменты времени.

Интенсивность нагрузки, действующей на оболочку со стороны вязкоупругой среды, можно написать в следующем виде:

$$q_z = k_c w - \int\limits_{-\infty}^{t} \Gamma(t-\tau) w(\tau) d\tau, \qquad (10)$$

здесь $\Gamma -$ ядро релаксации [5], а коэффициент k_c определяется зависимостью $k_c = q_1 + q_0\nabla^2$ (модель Пастернака), где ∇^2 - двумерный оператор Лапласа на поверхности контакта, w - прогиб оболочки, q_0, q_1 - постоянные.

Учитывая, что имеют место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$u_j(y) = u(x_j, y) + h_j\varphi_1(x_j, y); \quad \vartheta_j(y) = \vartheta(x_j, y) + h_j\varphi_2(x_j, y);$$

$$w_j(y) = w(x_j, y); \quad \varphi_j(y) = \varphi_2(x_j, y); \quad \varphi_{kpj}(y) = \varphi_1(x_j, y), \qquad (11)$$

здесь $h_j = 0{,}5h + H_j^1$, h - толщина оболочки, H_j^1 - расстояния от осей $j-$го поперечного стержня до поверхности оболочки, x_j и y - координаты линий сопряжения ребер с оболочкой, φ_j, φ_{kpj} - углы поворота и закручивания поперечных сечений кольцевых ребер.

С учетом соотношений (11) перемещение стержней выражаем через перемещений оболочки. Из условия стационарности (9) получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно искомых неизвестных.

Решение задачи. Рассмотрим нелинейные параметрические колебания поперечно подкрепленной круговой цилиндрической оболочки под действием радиальной нагрузки $q = q_0 + q_1 \sin\omega_1 t$, где q_1 - амплитуда, ω_1 - частота изменения давления оболочки, заполненной вязкоупругой средой. Считая, что края оболочки шарнирно оперты, т.е. при $x = 0; l$

$$N_x = 0; \quad M_x = 0; \quad w = 0; \quad \vartheta = 0.$$

Неизвестные величины аппроксимируем следующим образом:

$$u = \cos\frac{\pi x}{l}\sin(m\varphi)(u_0\cos\omega t + u_1\sin\omega t),$$

$$\vartheta = \sin\frac{\pi x}{l}\cos(m\varphi)(\vartheta_0\cos\omega t + \vartheta_1\sin\omega t),$$

$$w = \sin\frac{\pi x}{l}\sin(m\varphi)(w_0\cos\omega t + w_1\sin\omega t),$$

$$N_x = \sin\frac{\pi x}{l}\sin(m\varphi)(N_{x0}\cos\omega t + N_{x1}\sin\omega t),$$

$$N_y = \cos\frac{\pi x}{l}\cos(m\varphi)\left(N_{y0}\cos\omega t + N_{y1}\sin\omega t\right),$$

$$N_{xy} = -qR + \sin\frac{\pi x}{l}\sin(m\varphi)\left(N_{xy0}\cos\omega t + N_{xy1}\sin\omega t\right), \tag{12}$$

$$M_x = \sin\frac{\pi x}{l}\sin(m\varphi)\left(M_{x0}\cos\omega t + M_{x1}\sin\omega t\right),$$

$$M_y = \sin\frac{\pi x}{l}\sin(m\varphi)\left(M_{y0}\cos\omega t + M_{y1}\sin\omega t\right),$$

$$M_{xy} = \sin\frac{\pi x}{l}\cos(m\varphi)\left(M_{xy0}\cos\omega t + M_{xy1}\sin\omega t\right),$$

где m - число волн в окружном направлении, ω - частота колебания искомых величин: $u, \vartheta, w, N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$. Подставим аппроксимации (12) в функционал L и учитывая, что $x_1=0, x_2=l, y_1=0, y_2=2\pi, t'=0, t''=\frac{2\pi}{\omega}$, проинтегрируем по x, y и t. Тогда, вместо функционала (5) получаем функцию от искомых величин u_m, ϑ_m, w_m, N_{xm}, N_{ym}, N_{xym}, M_{xm}, M_{ym}, M_{xym}. Стационарное значение полученной функции определяются следующей системой:

$$\begin{aligned}
&1)\ \frac{\partial J}{\partial u_0}=0;\quad 2)\ \frac{\partial J}{\partial u_1}=0;\quad 3)\ \frac{\partial J}{\partial \vartheta_0}=0;\quad 4)\ \frac{\partial J}{\partial \vartheta_1}=0;\quad 5)\ \frac{\partial J}{\partial w_0}=0;\\
&6)\ \frac{\partial J}{\partial w_1}=0;\quad 7)\ \frac{\partial J}{\partial N_{x0}}=0;\quad 8)\ \frac{\partial J}{\partial N_{x1}}=0;\quad 9)\ \frac{\partial J}{\partial N_{y0}}=0;\quad 10)\ \frac{\partial J}{\partial N_{y1}}=0;\\
&11)\ \frac{\partial J}{\partial N_{xy0}}=0;\quad 12)\ \frac{\partial J}{\partial N_{xy1}}=0;\quad 13)\ \frac{\partial J}{\partial M_{x0}}=0;\quad 14)\ \frac{\partial J}{\partial M_{x1}}=0;\\
&15)\ \frac{\partial J}{\partial M_{y0}}=0;\quad 16)\ \frac{\partial J}{\partial M_{y1}}=0;\quad 17)\ \frac{\partial J}{\partial M_{xy0}}=0;\quad 18)\ \frac{\partial J}{\partial M_{xy1}}=0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Численный анализ колебаний. Нелинейная система уравнений (13) решена методом Ньютона со следующими значениями параметров:

$E = E_j = 6{,}67\cdot 10^9\ \frac{н}{м^2};\ \nu = 0{,}3;\ h = 0{,}45mm;$

$R = 160\,мм;\ l = 800мм;$

$\rho_0 = 7{,}8г/см^3;\ \frac{q}{q_0} = 3;\ \frac{q}{E} = 0{,}002;\ \Gamma(t) = \mathrm{A}e^{-\Psi t}\ (\Psi = 0{,}05;\ \mathrm{A} = 0{,}1615);$

$k = 4;\ m = 8;\ h_j = 1{,}39мм;\ F_j = 5{,}75мм^2;\ J_{xj} = 19{,}9мм^4;$

$$\frac{J_{zj}}{2\pi R^3 h} = 0{,}23\cdot 10^{-6}; \quad J_{kp.j} = 0{,}48\textit{мм}^4; \quad \tau_0 = \frac{q_0}{Eh^3} = 0{,}08; \quad \tau_1 = \frac{q_1}{Eh^3}.$$

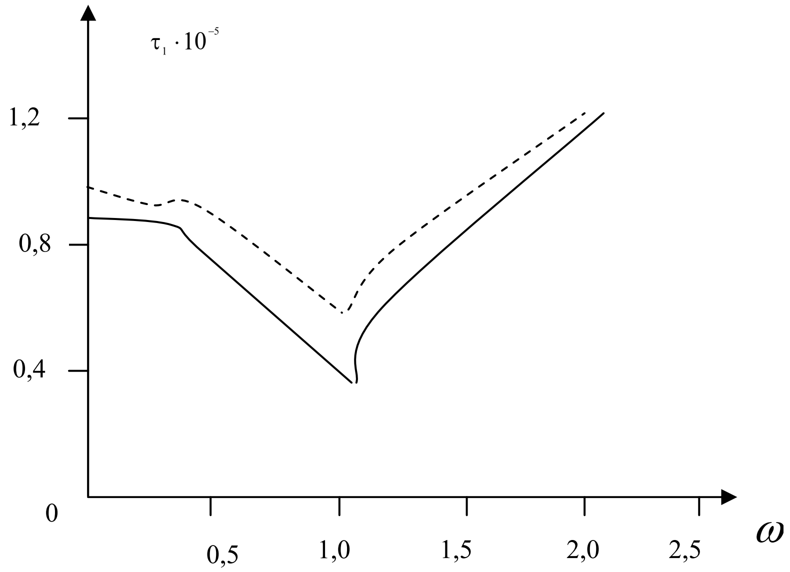

Рис.1. Области устойчивых и неустойчивых зон параметрических колебаний.

На рис.1 приведены зависимости зоны динамической устойчивости от параметров конструкции на плоскости «нагрузка-частота» и представлены в виде кривой. Эта кривая разделяет плоскость на две области: для точек одной области колебания ограничены, а для другой - неограниченны во времени. В графике штриховой линией показаны колебания поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки в вязкоупруой среде, а сплошной – в упругой среде. Из расчета оболочек имеем, что для вязкоупругого тела точка перелома характерной кривой поднимается над осью частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пирмамедов И.Т. Исследование параметрических колебаний нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки с заполнителем с применением модели Пастернака // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2005, №2 , с. 93-99.
2. Мехтиев М.А. Нелинейные колебания подкрепленной цилиндрической оболочки с вязкоупругим заполнителем // Функциональный анализ и его приложения. Материалы Международной конференции, посвященной 100-летнему юбилею академика З.И. Халилова. Баку, 2011, с.245-249.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972, 432 с.
4. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. Киев: Наукова думка, 1980, 367с.
5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физико-математическая литература, 1958, 439 с.

ÖZÜLÜ-ELASTİKİ MÜHİTLƏ TƏMASDA OLAN HALQALARLA MÖHKƏMLƏNDİRİLMİŞ SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN QEYRİ-XƏTTİ PARAMETRİK RƏQSLƏRİ

M.Ə.MEHDİYEV

XÜLASƏ

Məqalə variyasiya prinsipinin tətbiqi ilə daxili təzyiqə məruz qalan, özülü-elastiki mühitlə təmasda olan, halqalarla möhkəmləndirilmiş silindrik örtüyün qeyri-xətti parametrik rəqslərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Mühitin təsiri Pasternak modeli ilə nəzərə alınmışdır. «Qüvvə-tezlik» müstəvisində dayanıqlıq oblastını qeyri-dayanıqlıq oblastından ayıran əyri qurulmuşdur.

Açar sözlər: möhkəmləndirilmiş örtük, variyasiya prinsipi, potensial enerji, kinetik enerji, qeyri-xətti parametrik rəqslər, özülü-elastiki mühit.

NONLINEAR PARAMETRIC VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELL STIFFENED BY ANNULAR RIBS, CONTACTING A VISCOELASTIC MEDIUM

M.A.MEHDIYEV

SUMMARY

In the paper, a problem on parametric vibration of a stiffened circular ribs of a cylindrical shell contacting with external viscoelastic medium and situated under the action of internal pressure is solved in a geometric nonlinear statement by means of the variation principle. Influences of environment have been taken into account by means of the Pasternak model. Dependencies of dynamical stability area on the construction parameters are given on the plane «load-frequency».

Key words: stiffened shell, variation principle, potential energy, kinetic energy, nonlinear parametric vibrations, viscoelastic medium.

Поступила в редакцию: 06.07.2011 г.
Принято к печати: 03.10.2011 г.